Résolution interférométrique d'une étoile double.

Cet exercice rend compte d'une méthode expérimentale permettant de montrer qu'une étoile est double et de mesurer la distance angulaire entre ses composantes.

Question 1 :

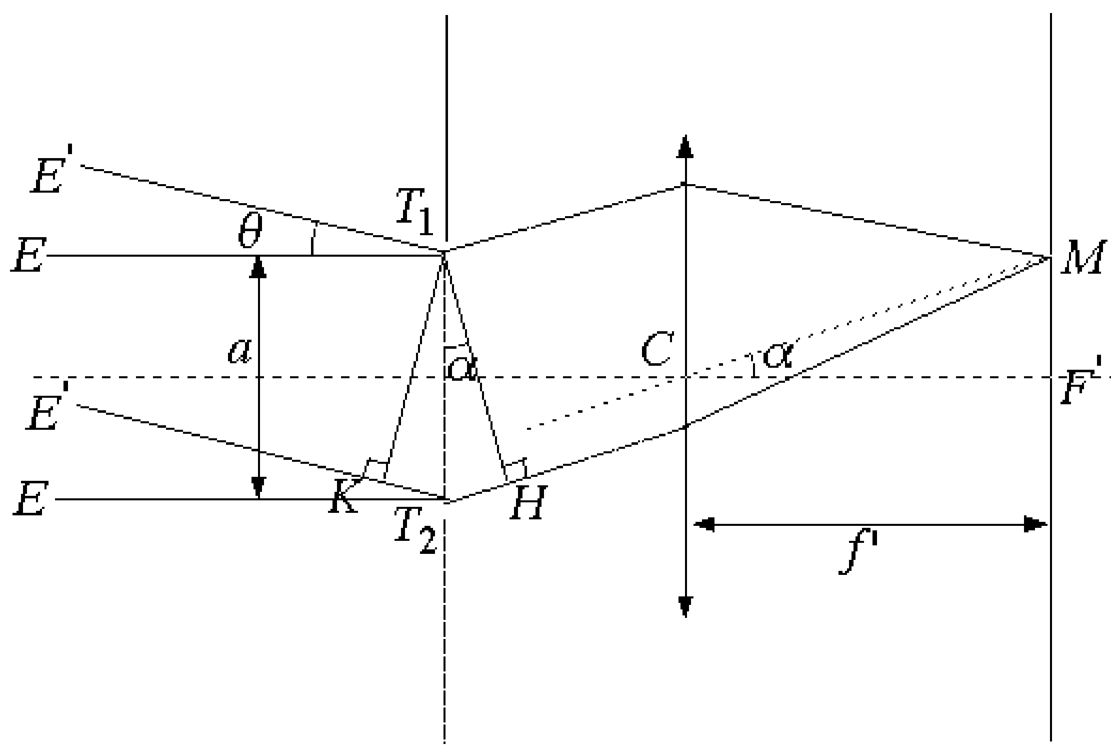
Une étoile E se trouve dans la direction de l'axe optique d'une lentille convergente de centre optique C, de distance focale f' et de foyer F'. On place devant la lentille d'une part un filtre (non représenté sur la figure) qui ne laisse passer que les radiations de longueur d'onde λ et d'autre part un écran placé de deux trous T_1 et T_2 distants de a. On repère les points du plan focal par un répère $F'xy$ où $F'x$ est parallèle à T_1T_2. Décrire ce qu'on observe dans le plan focal et calculer l'interfrange pour $f' = 1$ m, $\lambda = 0,6\ \mu\text{m}$ et $a = 6$ mm. Que se passe-t-il si a varie ?

On retrouve, bien sûr, le dispositif des trous d'Young avec interférences à l'infini.

Calculons la différence de marche $\Delta = [ET_2M] - [ET_1M]$ entre les deux rayons qui arrivent au point M de l'écran. On a

$$\Delta = ([ET_2] + [T_2M]) - ([ET_1] + [T_1M]]) = ([ET_2] - [ET_1]) + ([T_2M] - [T_1M])$$

En amont de la lentille, l'étoile émet un faisceau parallèle. Le théorème de Malus permet d'affirmer que le plan contenant T_1 et T_2, perpendiculaire au faiceau est une surface d'onde donc que les rayons en ces points sont en phase, donc à la même distance optique de E, c'est-à-dire que $[ET_1] = [ET_2]$.



Pour calculer $[T_2M] - [T_1M]$, il faut d'abord tracer correctement ces rayons. Ils convergent dans le plan focal, ils sont donc parallèles en amont de la lentille. Un troisième rayon, passant par C, parallèle à ceux-là, convergerait au même point et ne serait pas dévié, donc leur direction commune est celle de $\overrightarrow{CM}$ (voir figure où l'angle α défini plus loin est exagéré pour une meilleure lisibilité). Appliquons là encore le théorème de Malus en traçant un plan perpendiculaire à ces rayons, passant par T_1 et coupant l'autre rayon au point H. L'usage brutal du théorème conduirait à dire que H et T_1 sont en phase ; or T_1 est en phase avec T_2 donc H et T_2 seraient en phase et la distance T_2H serait nulle, ce qui est manifestement faux ! Cette contradiction provient de ce que, au passage par les trous la lumière diffracte, donc l'optique géométrique n'est plus valable (plus de propagation rectiligne) et le théorème non plus. Il faut donc être subtil. Dans une expérience de pensée, mettons la source au point M ; les lois de DESCARTES ne dépendant pas du sens de propagatuion de la lumière, on retrouve les mêmes rayons MT_1 et MT_2 parcourus à l'envers et le théorème de MALUS nous apprend que, dans cette situation, T_1 et H sont en phase, donc à la même distance optique *de la source* M donc $[T_1M] = [HM]$. Nous pouvons conclure :

$$\Delta = [T_2M] - [T_1M] = [T_2H] + [HM] - [T_1M] = [T_2H]$$

Un peu de géométrie maintenant : l'angle $\alpha = \widehat{HT_1T_2}$ est égal à $\widehat{MCF'}$. On a donc $[T_2H] = T_1T_2 \sin\alpha = a \sin\alpha$ et $x = F'M = CF' \tan\alpha = f' \tan\alpha$. Dans la zone d'interférences, α reste petit et $\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha$ d'où

$$\Delta = \frac{a\,x}{f'}$$

d'où un déphasage

$$\varphi = 2\,\pi\,\frac{\Delta}{\lambda} = 2\,\pi\,\frac{a\,x}{\lambda\,f'}$$

Si l'on note $\underline{s}_1$ l'amplitude complexe du rayon T_1M à son arrivée en M, alors celle du rayon T_2M a pour amplitude complexe $\underline{s}_2 = \underline{s}_1 \exp(-\jmath\,\varphi)$. Les deux rayons proviennent de la même source, on a donc cohérence et additivité des amplitudes complexes :

$$\underline{s}_{tot} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = \underline{s}_1\,[1 + \exp(-\jmath\,\varphi)]$$

On en déduit l'intensité par passage au carré du module :

$$I = |\underline{s}_{tot}|^2 = \underline{s}_{tot}\,\underline{s}_{tot}^* = \underline{s}_1\,\underline{s}_1^*\,[1 + \exp(-\jmath\,\varphi)]\,[1 + \exp(\jmath\,\varphi)] = 2\,I_0\,(1 + \cos\varphi) = 2\,I_0\,\left[1 + \cos\left(2\,\pi\,\frac{a\,x}{\lambda\,f'}\right)\right]$$

où $I_0 = \underline{s}_1\,\underline{s}_1^*$.

Répondons maintenant à la question posée : On observe des franges rectilignes parallèles à Oy dont l'interfrange (périodicité) est $i = \lambda\,f'/a$.

A.N. $i = 6\,10^{-7} \cdot 1/6\,10^{-3} = 10^{-4}$ m.

Et bien sûr si a augmente, i diminue, les franges se resserrent.

N.B. de telles franges très serrées s'observent à l'aide d'un oculaire.

Question 2 :

En réalité, l'étoile est double, constituée de deux étoiles distantes angulairement de θ, supposées de même intensité. Où se forme l'image de la seconde étoile ? Quel système d'interférences observerait-on s'il n'y avait que la seconde étoile ? Quel éclairement observe-t-on avec l'étoile double et pour quelle(s) valeur(s) de a les franges disparaissent-elles ? Expérimentalement, la plus petite valeur est $a_1 = 0,52$ mm ; calculer θ.

L'image géométrique de l'étoile se trouve à l'intersection du plan focal et du rayon issu de l'étoile, passant par le centre optique, rayon non dévié et faisant donc l'angle θ avec l'axe. L'image se trouve donc à l'abscisse $-f' \tan\theta \approx -f'\,\theta$. (Signe moins avec les conventions d'oroentation de la figure)

Les deux étoiles étant, bien entendu, incohérentes, il y a additivité des éclairements. Le calcul de l'éclairement au point M lorsque l'étoile E' est supposée seule se mène comme plus haut, soit, en allant un peu plus vite :

$$\Delta' = ([E'T_2] + [T_2M]) - ([E'T_1] + [T_1M]]) = ([E'T_2] - [E'T_1]) + ([T_2M] - [T_1M])$$

En utilisant le théorème de MALUS, $[E'T_2] - [E'T_1] = [KT_2] = a \sin\theta \approx a\,\theta$ (où K est le projeté de T_1 sur $E'T_2$) et $[T_2M] - [T_1M] = a\,x/f'$ comme plus haut. Le déphasage et l'intensité sont donc

$$\varphi' = 2\,\pi\,\frac{\Delta'}{\lambda} = 2\,\pi\,\frac{a}{\lambda}\left(\frac{x}{f'} + \theta\right)$$

$$I' = 2\,I'_0\,(1+\cos\varphi') = 2\,I'_0\,\left\{1+\cos\left[2\,\pi\,\frac{a}{\lambda}\,\left(\frac{x}{f'}+\theta\right)\right]\right\}$$

et $I_{total} = I + I'$

Remarquons qu'on passe de I à I' par une translation de $-f'\,\theta$ car $I'(x) = I(x+f'\,\theta)$, c'est -à-dire que la seconde fonction est centrée sur l'image géométrique de la seconde étoile.

Puisque les deux étoiles ont même luminosité, $I_0 = I'_0$, alors

$$I_{total} = 2\,I_0\,\left\{2+\cos\left(2\,\pi\,\frac{a\,x}{\lambda\,f'}\right)+\cos\left[2\,\pi\,\frac{a}{\lambda}\,\left(\frac{x}{f'}+\theta\right)\right]\right\}$$

Avant même de faire le moindre calcul, remarquons que si les deux cosinus sont en opposition de phase, alors $I_{total} = 4\,I_0$ et donc ne dépend plus de x : il n'y a plus d'interférences. Ceci se produit pour

$$2\,\pi\frac{a\,\theta}{\lambda} = (2\,p+1)\,\pi \qquad p\in\mathbb{N}$$

soit

$$a_p = (2\,p+1)\,\frac{\lambda}{2\,\theta}$$

D'où l'idée du protocole expérimental suivant : On réalise l'expérience avec une petite valeur de a et l'on visualise les franges d'interférences ; puis on fait croître a lentement. Le contraste des franges diminue (si l'étoile est double) et l'on continue jusqu'à la disparition des franges (contraste nul) ; on atteint ainsi a_1 dont la mesure permet de calculer θ par

$$\theta = \frac{\lambda}{2\,a_1}$$

A.N. $\theta = 6\,10^{-7}/1,04\,10^{-3} = 5,77\,10^{-4}\,\text{rad} = 1,98\,'$

Allons maintenant au delà des désirs de l'interrogateur en répondant à la question qu'il n'a pas encore posée (il la gardait en réserve pour les bons élèves) et terminons par le calcul du contraste pour une valeur quelconque de a en transformant la somme de cosinus en produit

$$I_{total} = 4\,I_0\,\left\{1+\cos\left(\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right)\,\cos\left[\pi\,\frac{a}{\lambda}\,\left(\frac{2\,x}{f'}+\theta\right)\right]\right\}$$

soit une fonction de x dont les extremums sont obtenus lorsque le second cosinus vaut ±1, soit

$$I_{max} = 4\,I_0\,\left[1+\left|\cos\left(\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right)\right|\right]$$

$$I_{min} = 4\,I_0\,\left[1-\left|\cos\left(\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right)\right|\right]$$

sans oublier la valeur absolue. Le contraste est donc

$$\gamma = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = \frac{8\,I_0\,\left|\cos\left(\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right)\right|}{8\,I_0} = \left|\cos\left(\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right)\right|$$

qui s'annule pour les valeurs de a calculées plus haut.

Question 3 :

En réalité pour $a = a_1$, les franges ne disparaissent pas, mais leur contraste est minimal et vaut alors $\gamma_{min} = 0,1$. Quelle hypothèse faut-il remettre en question ? Que peut-on en déduire quantitativement ?

L'hypothèse qu'il faut changer est bien sûr $I_0 = I'_0$; on suppose donc $I_0 \neq I'_0$. Pour $a = a_1$, il y a opposition de phase et l'on a :

$$I_{total} = 2\,I_0\,\left[1 + \cos\left(2\,\pi\,\frac{a_1\,x}{\lambda\,f'}\right)\right] + 2\,I'_0\,\left\{1 + \cos\left[2\,\pi\,\frac{a_1}{\lambda}\,\left(\frac{x}{f'} + \theta\right)\right]\right\}$$

$$I_{total} = 2\,I_0\,\left[1 + \cos\left(2\,\pi\,\frac{a_1\,x}{\lambda\,f'}\right)\right] + 2\,I'_0\,\left[1 + \cos\left(2\,\pi\,\frac{a_1\,x}{\lambda\,f'} + \pi\right)\right]$$

$$I_{total} = 2\,I_0\,\left[1 + \cos\left(2\,\pi\,\frac{a_1\,x}{\lambda\,f'}\right)\right] + 2\,I'_0\,\left[1 - \cos\left(2\,\pi\,\frac{a_1\,x}{\lambda\,f'}\right)\right]$$

$$I_{total} = 2\,(I_0 + I'_0) + 2\,(I_0 - I'_0)\,\cos\left(2\,\pi\,\frac{a_1\,x}{\lambda\,f'}\right)$$

En supposant, pour fixer les idées, que $I_0 > I'_0$, on a alors :

$$I_{max} = 2\,(I_0 + I'_0) + 2\,(I_0 - I'_0) = 4\,I_0$$

$$I_{min} = 2\,(I_0 + I'_0) - 2\,(I_0 - I'_0) = 4\,I'_0$$

$$\gamma_{min} = \frac{I_0 - I'_0}{I_0 + I'_0} = \frac{1 - I'_0/I_0}{1 + I'_0/I_0}$$

On peut, si l'on arrive à mesurer ou évaluer le contraste, en déduire le rapport I'_0/I_0 par

$$\frac{I'_0}{I_0} = \frac{1 - \gamma_{min}}{1 + \gamma_{min}}$$

A.N. $I'_0/I_0 = (1 - 0,1)/1 + 0,1) = 0,9/1,1 = 0,82$

Question 4^{***} ***:***
Comment, dans le contexte de la question 3, calculer le contraste pour $a \neq a_1$ ***?***

C'est très compliqué...sauf si l'on pense aux amplitudes complexes.

$$I_{total} = \mathfrak{Re}\left\{2\,I_0\,\left[1 + \exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{a\,x}{\lambda\,f'}\right)\right] + 2\,I'_0\,\left[1 + \exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{a}{\lambda}\,\left(\frac{x}{f'} + \theta\right)\right)\right]\right\}$$

$$I_{total} = \mathfrak{Re}\left\{2\,(I_0 + I'_0) + 2\,\exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{a\,x}{\lambda\,f'}\right)\,\left[I_0 + I'_0\,\exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right)\right]\right\}$$

Posons

$$I_0 + I'_0\,\exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right) = I_1\,\exp\jmath\varphi$$

alors tout devient aisé

$$I_{total} = \mathfrak{Re}\left\{2\,(I_0 + I'_0) + 2\,I_1\,\exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{a\,x}{\lambda\,f'} + \varphi\right)\right\}$$

$$I_{total} = 2\,(I_0 + I'_0) + 2\,I_1\,\cos\left(2\,\pi\,\frac{a\,x}{\lambda\,f'} + \varphi\right)$$

$$I_{max} = 2\,(I_0 + I'_0) + 2\,I_1$$

$$I_{min} = 2\,(I_0 + I'_0) - 2\,I_1$$

$$\gamma = \frac{I_1}{I_0 + I'_0}$$

Calculons maintenant, *et maintenant seulement*, sinon l'essentiel eût été noyé sous les calculs, I_1 à partir de son carré :

$$I_1^2 = \left| I_0 + I_0' \exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right)\right|^2 = \left(I_0 + I_0' \exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right)\right)\,\left(I_0 + I_0' \exp\left(-2\,\jmath\,\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right)\right)$$

$$I_1^2 = I_0^2 + 2\,I_0\,I_0' \cos\left(2\,\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right) + {I_0'}^2$$

On n'a plus qu'à reporter I_1 dans l'expression de γ

$$\gamma = \frac{\sqrt{I_0^2 + 2\,I_0\,I_0' \cos\left(2\,\pi\,\frac{a\,\theta}{\lambda}\right) + {I_0'}^2}}{I_0 + I_0'}$$